Übungsblatt Nr. 9

Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"
WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. Wellenpaketdynamik beim harmonischen Oszillator (4 Punkte)
Ein harmonischer Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand
$$\psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x), \; c_n = e^{-a/2} \frac{a^{n/2}}{\sqrt{n!}}$$
aus Aufg. 1, Blatt 8.
   a) Berechne den Mittelwert $\overline{x}$ des Ortsoperators zur Zeit $t = 0$.
   a) Berechne aus der zeitabhängigen Wellenfunktion$\psi(x,t)$ den Mittelwert $\overline{x}(t)$ für eine beliebige Zeit $t > 0$. Zeige, dass der Mittelwert in der Form $\overline{x}(t) = x_0 \cos(\omega t)$ geschrieben werden kann.

   Hinweis: Verwende die Matrixelemente x_{mn} aus Aufg. 3, Blatt 8, und beachte die Orthonormierung der Eigenfunktionen ϕ_n.

2. Unschärferelation (4 Punkte)
Zeige, daß für die Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ des harmonischen Oszillators die Unschärferelationen
$$\Delta x \Delta p \;=\; \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$
gilt.
Hinweis: Berechne zunächst die Matrixelemente $(\varphi_m, \hat{x}^2 \varphi_n)$, $(\varphi_m, \hat{p}^2 \varphi_n)$ analog zu Aufg. 3, Blatt 8.

3. Teilchen im Kasten (4 Punkte)
Betrachte die eindimensionale Bewegung eines Teilchens in dem Potential
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$
("Potentialtopf" mit unendlichen hohen Wänden).
Bestimme die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen.

   Hinweis: Die Wellenfunktionen außerhalb des Topfes verschwinden identisch (d. h. $\psi_n(x) = 0$ für $x < -a$ und $x > a$); für $x = -a$ bzw. $x = a$ sind sie stetig (aber nicht mehr stetig differenzierbar).

Abgabetermin: Dienstag, 17. 12. 08, 13.00 Uhr