Übungsblatt Nr. 7

Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"
WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. Zeitentwicklung eines Zweizustandssystems (4 Punkte)
   Es seien ϕ_1, ϕ_2 zwei normierte und zueinander orthogonale Wellenfunktionen eines Systems mit dem Hamiltonoperator $\hat{h}$. Für die Wirkung des Hamiltonoperator auf diese Funktionen gelte (s. Aufgabe 2, Blatt 6):
   $$\hat{h}\phi_1 = \epsilon\,(2\phi_1 - \sqrt{2}\phi_2),\;\; \hat{h}\phi_2 = \epsilon\,(-\sqrt{2}\phi_1 + \phi_2)$$
   wobei $\epsilon = \hbar\omega$ ein fester Energieparameter ist.
   Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand ϕ_1. Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P_{21}(t) = |(\phi_2, \phi_1(t))|^2$, es zu einer Zeit $t > 0$ im Zustand ϕ_2 zu finden.
   Hinweis: Schreibe ϕ_1 als Linearkombination der beiden Energieeigenfunktionen von $\hat{h}$; dann lässt sich die Zeitentwicklung $\phi_1(t)$ leicht angeben.

2. Bewegungsgleichung für Mittelwerte (4 Punkte)
   $\Psi(x,t)$ sei Lösung der zeitabhängigen Schrödinger–Gleichung
   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t) \quad .$$
   Zeige, daß für den Mittelwert eines (zeitunabhängigen) Operators $\hat{A}$
   $$\langle \hat{A} \rangle = \Big(\Psi(t), \hat{A}\Psi(t)\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\,\hat{A}\,\Psi(x,t)\,dx$$
   die folgende Bewegungsgleichung gilt:
   $$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle$$

3. Eindimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)
   Der Hamilton–Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet:
   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$
   (a) Berechne die Kommutatoren $[\hat{H}, \hat{x}]$ und $[\hat{H}, \hat{p}]$.
   (b) Leite mit Hilfe von Aufgabe 2 die folgende Bewegungsgleichung für $\langle \hat{x} \rangle$ her:
   $$\frac{d^2}{dt^2}\,\langle \hat{x} \rangle = -\omega^2 \langle \hat{x} \rangle$$
   (c) Wie bewegt sich der Schwerpunkt der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$, wenn die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ die folgende Form besitzt:
   $$\Psi(x,0) = N\,e^{ikx}e^{-\alpha x^2}$$

Abgabetermin: Dienstag, 2. 12. 08, 13.00 Uhr