Übungsblatt Nr. 4

Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"
WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. De Broglie–Beziehung (2 Punkte)
   Für die Interferenz– bzw. Beugungserscheinungen materieller Teilchen gilt die de Broglie–Beziehung $p = h/\lambda$, durch die einem Teilchen mit Impuls p die Wellenlänge λ zugeordnet wird ($h = 6.6262 \cdot 10^{-34}$ Js).
   Wie groß ist die Geschwindigkeit (m/s) und die kinetische Energie (eV) eines Elektrons ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) und eines Neutrons ($m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg) bei einer Wellenlänge von 1 nm.
   Wie groß ist (nach obiger Beziehung) die Wellenlänge eines Staubteilchens ($m = 10^{-3}$ g) mit einer Geschwindigkeit von $v = 100$ m/s?

2. Orthogonale Funktionen (3 Punkte)
   Betrachte die Polynome $p_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sowie das durch
   $$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$
   definierte Skalarprodukt für Funktionen. Bilde mit Schmidt-Orthogonalisierung aus den $p_n(x)$ durch geeignete Linearkombination drei orthonormierte Polynome $q_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, so dass also $(q_n, q_m) = \delta_{nm}$ gilt. Schreibe $p_2(x)$ als Linearkombination der $q_n(x)$.

3. Eigenwerte und Eigenvektoren (4 Punkte)
   Falls die Gleichung
   $$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$
   erfüllt ist, wobei $\boldsymbol{M}$ eine quadratische Matrix, $\boldsymbol{x}$ ein Vektor $\neq \boldsymbol{0}$ und λ eine Zahl ist, so heißt $\boldsymbol{x}$ *Eigenvektor* und λ *Eigenwert* der Matrix $\boldsymbol{M}$.
   Bestimme die beiden Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix
   $$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$
   wobei a, b und c reelle Zahlen sind. Berechne die inverse Matrix $\boldsymbol{M}^{-1}$.

4. Gaußintegral (2 Punkte)
   Berechne das zweifache Integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2$$
   durch Transformation auf ebene Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi, y = \varrho\sin\varphi$.
   Hinweis: Das Flächenelement in ebenen Polarkoordinaten ist $\varrho\, d\varrho\, d\varphi$.
   Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$.

Abgabetermin: Dienstag, 11. 11. 08, 13:00 Uhr