Übungsblatt Nr. 1

Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"
WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. Gradient, Laplace-Operator (3 Punkte)
   a) Berechne ∇r, $\nabla \frac{1}{r}$ und ∇e^{-r}. (Dabei ist $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.)
   b) Berechne $\nabla^2 r$.

2. Polarkoordinaten (3 Punkte)
   Bei der Darstellung des Ortsvektors in Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

   lassen sich für jeden Punkt (r, ϑ, φ) die Vektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \\ \boldsymbol{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

   bestimmen. Zeige, dass diese Vektoren die Länge 1 haben (Einheitsvektoren) und aufeinander senkrecht stehen.

3. Bewegung in Polarkoordinaten (5 Punkte)
   Die Bahnkurve eines Massepunktes sei durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}\,(r(t), \vartheta(t), \varphi(t)) = r(t)\, \boldsymbol{e}_r(t)$$

   in Polarkoordinaten gegeben.
   Zerlege die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ nach Komponenten der (momentanen) Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_\vartheta(t)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi(t)$. Hinweis: Die Komponente eines Vektors in Richtung eines Einheitsvektors ist gleich dem Skalarprodukt der beiden Vektoren, z.B. Komponete der Geschwindigkeit in ϑ-Richtung $= \boldsymbol{e}_\vartheta \dot{\boldsymbol{r}}(t)$.
   Was ergibt sich im Fall einer gleichförmigen ($\varphi = \omega t$) Kreisbewegung in der x–y Ebene ($r = r_0, \vartheta = \frac{\pi}{2}$) für die Zentrifugalkraft und die kinetische Energie?

Abgabetermin: Dienstag, 21.10.08, 12.00 Uhr im PCI, INF 253.