Vorlesung "Einführung in die Quantentheorie"
Zusatz zu Abschnitt 4.2

Bestimmung der Drehimpulseigenfunktionen

Löse die Eigenwertprobleme für $\hat{l}^2$ und $\hat{l}_z$:

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 \, \chi(\vartheta, \varphi) &= \hbar^2 \lambda \, \chi(\vartheta, \varphi) && (1) \\ \hat{l}_z \, \chi(\vartheta, \varphi) &= \hbar \mu \, \chi(\vartheta, \varphi) && (2) \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\chi(\vartheta, \varphi)$ den Winkelanteil einer Wellenfunktion in Polarkoordinaten;

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) && (3) \\ \hat{l}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} && (4) \end{aligned}$$

(a) Lösen mit Produktansatz $\chi(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$

(b) Einsetzen des Ansatzes in (2) liefert Differentialgleichung für $\Phi(\varphi)$:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varphi) = i\mu \, \Phi(\varphi)$$

Allgemeine Lösung: $\Phi(\varphi) = e^{i\mu\varphi}$
Wegen physikalischer Bedeutung muß $\Phi(\varphi)$ periodisch sein, d. h. $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$.
Dies ist nur möglich für $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\Rightarrow$ Eigenwerte von $\hat{l}_z$: $\hbar\mu = \hbar m \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
zugehörige (normierte) Eigenfunktionen: $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

(c) Einsetzen vom $\chi_m(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi_m(\varphi)$ in (1) liefert Differentialgleichung für $\Theta(\vartheta)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \Theta(\vartheta) + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Theta(\vartheta) + (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta}) \Theta(\vartheta) = 0 \qquad (5)$$

(d) Betrachte zunächst den Fall $m = 0$:
Führe die neue Variable ξ ein: $\quad \xi = \cos \vartheta \quad , -1 \le \xi \le 1$
und die Funktion $P(\xi)$:

$$P(\xi) = \Theta(\arccos \xi) \quad \text{bzw.} \quad \Theta(\vartheta) = P(\cos \vartheta)$$

Einsetzen in (5) liefert folgende Differentialgleichung für $P(\xi)$:

$$(1 - \xi^2) P''(\xi) - 2\xi P'(\xi) + \lambda P(\xi) = 0 \qquad (6)$$

Ab jetzt geht es wie beim harmonischen Oszillator weiter:

(i) Potenzreihenansatz $P(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$

(ii) Rekursionsgleichung für Koeffizienten:

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

Man erhält gerade Lösungen für $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$; ungerade Lösungen für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Allgemein ergeben sich keine physikalischen Lösungen, da sich die Potenzreihe asymptotisch wie die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\xi^2)^n = \frac{1}{1-\xi^2}$ verhält, d. h. für $\xi = \pm 1$ divergiert (es gilt $\frac{a_{n+2}}{a_n} \to 1$ für $n \to \infty$).

Eine physikalische Lösung existiert nur, wenn die Reihe abbricht, d. h. für $\lambda = l(l+1) \quad , \quad l = 0, 1, 2, \ldots$. Es ergeben sich Polynomlösungen $P_l(\xi)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ (**Legendre–Polynome**).

(iii) Eigenschaften der Legendre–Polynome (ohne Beweis):

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial \xi^l} (\xi^2 - 1)^l \qquad \text{(Rodriguez – Formel)}$$

$$\int_{-1}^{1} d\xi\, P_l(\xi) P_{l'}(\xi) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \qquad \text{(Orthogonalität)}$$

$$\frac{1}{(1 - 2h\xi + h^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(\xi) \qquad \text{(erzeugende Funktion)}$$

$$(l+1) P_{l+1}(\xi) - (2l+1)\xi P_l(\xi) + l P_{l-1}(\xi) = 0 \qquad \text{(Rekursionsbeziehung)}$$

(e) Im Fall $m \neq 0$ erfüllen die **assoziierten Legendre–Polynome**

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \quad , \quad m = 0, 1, \ldots, l$$

die Differentialgleichung

$$(1 - \xi^2) P''(\xi) - 2\xi P'(\xi) + (\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2}) P(\xi) = 0$$

mit $\lambda = l(l+1)$. Ersetzt man schließlich wieder die Variable ξ durch $\cos\vartheta$, so erhält man die normierten Drehimpulseigenfunktionen

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m N_{lm} P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} & ; \quad m \geq 0 \\ N_{l|m|} P_l^{|m|}(\cos\vartheta) e^{im\varphi} & ; \quad m < 0 \end{cases}$$

mit Normierungsfaktoren

$$N_{lm} = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{l}^2\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad l = 0, 1, 2, \ldots \\ \hat{l}_z\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) &= \hbar m\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l \end{aligned}$$