

Zur Mathematik der Hermite-Polynome
Anlage zum QT-Übungsblatt 8

1. Rodriguez-Formel

Die Hermite-Polynome $H_n(z)$ lassen sich in einfacher Weise sukzessive aus den Ableitungen der Funktion

$$f(z) = e^{-z^2}$$

erzeugen:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -2ze^{-z^2} \\ f''(z) &= (4z^2 - 2)e^{-z^2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^n H_n(z) e^{-z^2}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $H_n(z)$ das n -te Hermite Polynom. Allgemein lautet die Definition (Rodriguez-Formel)

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$$

2. Erzeugende Funktion

Betrachte

$$\begin{aligned} f(z + \lambda) &= e^{-(z+\lambda)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^{(n)}(z) \quad (\text{Taylorentwicklung nach } \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (-1)^n H_n(z) e^{-z^2} \quad (\text{nach 1.}) \\ f(z - \lambda) e^{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \end{aligned}$$

also gilt

$$w(z, \lambda) := e^{2z\lambda - \lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z). \quad (*)$$

Die Funktion $w(z, \lambda)$ wird als erzeugende Funktion der Hermite-Polynome bezeichnet. Die Hermite-Polynome tauchen hier als die z -abhängigen Koeffizienten einer Taylor-Reihe in λ auf.

3. Rekursionsrelationen

Differenziert man Gleichung (*) partiell nach λ , folgt

$$\frac{\partial w(z, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} H_n(z).$$

Ausgeschrieben bedeutet das

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} 2z H_n(z) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} H_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_{n+1}(z).$$

Mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} (n+1) H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n H_{n-1}(z)$$

(kein Beitrag für $n=0$!)

erhält man die sehr nützlichen Rekursionsrelationen

$$H_{n+1}(z) - 2z H_n(z) + 2n H_{n-1}(z) = 0.$$

4. Differentialgleichungen

Analog liefert die partielle Differentiation von (*) nach z

$$\frac{\partial w(z, \lambda)}{\partial z} = 2\lambda w(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H'_n(z).$$

Wegen

$$\lambda w(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n H_{n-1}(z)$$

folgt

$$H'_n(z) = 2n H_{n-1}(z)$$

Differentiation der Rodriguez-Formel liefert

$$\frac{\partial H_n(z)}{\partial z} = (-1)^n 2z e^{z^2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} (e^{-z^2}) + (-1)^n e^{z^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} (e^{-z^2}),$$

also

$$H'_n(z) = 2z H_n(z) - H_{n+1}(z).$$

Durch Gleichsetzen erhält man wieder die Rekursionsrelationen. Nochmaliges Differenzieren liefert dann

$$\begin{aligned} H''_n(z) &= 2H_n(z) + 2z H'_n(z) - H'_{n+1}(z) \\ &= 2H_n(z) + 2z H'_n(z) - 2(n+1)H_n(z), \end{aligned}$$

also

$$H''_n(z) - 2z H'_n(z) + 2n H_n(z) = 0$$

Diese Differentialgleichungen zeigen, dass die Polynome $H_n(z)$ in der Tat die bei der Lösung der (zeitunabhängigen) Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator auftretenden Hermite-Polynome sind.

5. Orthogonalitätsrelationen

Die Hermite-Polynome erfüllen die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}.$$

Dazu betrachte man

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} w(z,t) w(z,s) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{2z(t+s)} e^{-t^2-s^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-(t+s))^2} e^{2ts} dz \\ &= e^{2ts} \sqrt{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ts)^n}{n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} w(z,t) w(z,s) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m(z) \frac{s^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz. \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}.$$