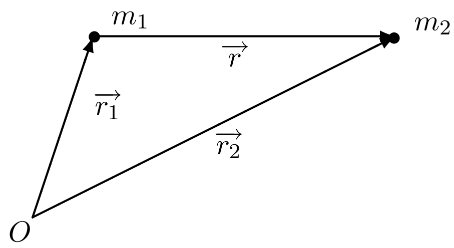
Schwerpunkts- und Relativkoordinaten beim Zweikörperproblem

Betrachte 2 Massenpunkte (z.B. Atome eines zweiatomigen Moleküls), die miteinander wechselwirken.

Klassische kinetische Energie:

$$T = \frac{m_1}{2}\,\dot{\vec{r}_1}^{\,2} + \frac{m_2}{2}\,\dot{\vec{r}_2}^{\,2}\ .$$



Definiere Schwerpunkts- und Relativkoordinaten durch (vgl. Skizze):

$$\begin{cases} \vec{R} = & \frac{m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2} \\ \vec{r} = & \vec{r_2}-\vec{r_1} \end{cases}\ .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad \tfrac{m_1+m_2}{m_2}\vec{R}-\vec{r} &= \vec{r_1}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \\ \tfrac{m_1+m_2}{m_1}\vec{R}+\vec{r} &= \vec{r_2}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} m_1\vec{r_1}^{\,2}+m_2\vec{r_2}^{\,2} &= m_1\left(\vec{R}-\frac{m_2}{M}\vec{r}\right)^2+m_2\left(\vec{R}+\frac{m_1}{M}\vec{r}\right)^2 \\ &= (m_1+m_2)\vec{R}^{\,2}+\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{M^2}\vec{r}^{\,2} \end{aligned}$$

Analoge Beziehungen gelten für die Zeitableitungen aller Ortsvektoren.

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M}{2}\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{\mu}{2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2}}\ ,$$

wobei $M = m_1 + m_2$ und $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ die Gesamt- bzw. reduzierte Masse ist.

$\Longrightarrow$ Separation von Schwerpunkts- und Relativbewegung!