Übungsblatt 13 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 04.02.2013 (11:00)

Hinweis: Die erreichbaren Punkte zählen nicht zur Gesamtpunktzahl im Rahmen der Bonus-Regelung, die erhaltenen Punkte werden aber angerechnet.

Aufgabe 1 (Zeitentwicklung von Wellenfunktionen).

Es seien $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ zwei normierte und zueinander orthogonale Wellenfunktionen eines Systems mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$. Für die Wirkung des Hamiltonoperators auf diese Funktionen gelte:

$$\hat{H}|\phi_1\rangle = \epsilon|\phi_1\rangle - \nu|\phi_2\rangle, \quad \hat{H}|\phi_2\rangle = \epsilon|\phi_2\rangle - \nu|\phi_1\rangle \,,$$

wobei ϵ und ν reell und > 0 sind.

a) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{H}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ an. (2P)

b) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenfunktionen $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ von $\hat{H}$? Drücken Sie $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ durch $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ aus. (3P)

c) Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\phi_1\rangle$. Da $|\phi_1\rangle$ keine Eigenfunktion von $\hat{H}$ ist, wird $|\phi_1\rangle$ nichtstationär sein. Für die Zeitabhängigkeit von $|\phi_1\rangle$ schreibt man

$$\begin{aligned} |\phi_1(t=0)\rangle &= \sum_{n=1}^{2} a_n|\psi_n\rangle \qquad \text{und} \\ |\phi_1(t)\rangle &= \sum_{n=1}^{2} a_n|\psi_n\rangle \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \,, \end{aligned}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten a_n und die zugehörigen Eigenwerte E_n aus Teilaufgabe **b)** einzusetzen sind. Diese Vorgehensweise ergibt sich aus der Tatsache, dass für Eigenfunktionen von $\hat{H}$ die Zeitentwicklung sofort angebbar ist. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeit $P(t) = |\langle\phi_1(t=0)|\phi_1(t)\rangle|^2$, das System zu einer Zeit $t > 0$ im Zustand $|\phi_1(t=0)\rangle$ wiederzufinden. Was ist zu beobachten? (5P)

d) Sei nun $\Psi(x,t)$ ein beliebiger Zustand mit der allgemeinen Zeitentwicklung

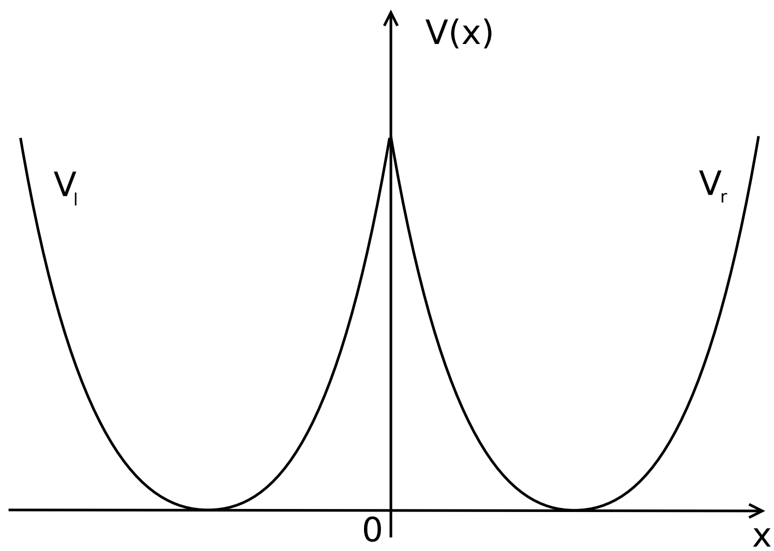
$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\psi_n(x) \,, \quad a_n(t) = a_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \,,$$

wobei die $\psi_n(x)$ (zeitunabhängige) Eigenfunktionen eines Hamiltonoperators $\hat{H}$ sind. Welche Bedingungen müssen an die $a_n(t)$ gestellt werden, damit $\Psi(x,t)$ einen stationären Zustand beschreibt? (3P)

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Doppelmuldenpotential).

Man betrachte zwei harmonische Oszillatoren mit symmetrisch nach links und rechts verschobenem Parabelpotential (Massen und Kraftkonstanten seien identisch, Potentialkurven V_l und V_r, vgl. Skizze).



Bestimmen Sie die beiden niedrigsten Eigenzustände des Gesamthamiltonoperators

$$\mathcal{H} = T_{kin} + V_l + V_r$$

als Linearkombination des jeweils niedrigsten Zustandes (ϕ_l und ϕ_r) von $T_{kin} + V_l$ und $T_{kin} + V_r$ gemäß $\psi = c_l\phi_l + c_r\phi_r$.

Benutzen Sie hierfür das Beiblatt zu Kap. III.5, die Diagonalelemente der Hamilton- und Überlappmatrix gemäß Vorlesung (H.O. und H_2^+-Molekülion) und stellen Sie deren Außerdiagonalelemente durch die Abkürzungen W und S dar. Geben Sie die explizite Form von c_l und c_r unter Benutzung dieser Abkürzungen an (vgl. Blatt 12, Aufg. 2)! Skizzieren Sie die Wellenfunktionen als Funktion von x (siehe Skizze) für den Fall, dass die Grundzustandswellenfunktionen ϕ_l und ϕ_r nur im klassisch verbotenen Bereich nennenswert überlappen. Welche dieser Wellenfunktionen gehört zum kleineren Energieeigenwert (beachte: $W < 0$)? Was folgt für sehr große relative Verschiebung der Parabelpotentiale?

(5P)