Übungsblatt 9 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 07.01.2013 (11:00)

Aufgabe 1 (Linearkombination von Eigenzuständen).
Ein System sei im Zustand

$$\psi(x) = \sqrt{3}\psi_0(x) + 2i\psi_1(x) - \psi_2(x)\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

wobei $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ normierte Eigenfunktionen eines Hamiltonoperators $\hat{H}$ mit den Eigenwerten E_0, E_1 bzw. E_2 sind.

a) Normieren Sie $\psi(x)$; benutzen Sie im folgenden immer die normierte Version. (2P)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Energiemessung den Wert E_1? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nicht E_2 zu messen? (2P)

c) Bestimmen Sie den Mittelwert der Energie, $\bar{E} = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ und die Energieunschärfe $\Delta E = \sqrt{\langle\psi|(\hat{H} - \bar{E})^2|\psi\rangle}$. (6P)

d) Werten Sie $\bar{E}$ und ΔE für den Spezialfall des starren Rotators mit raumfester Achse aus, d.h. $E_m = Bm^2\,, m = (0,1,2)\,, B = const.$ (2P)

Aufgabe 2 (Separationsansatz).
Gegeben sei die Schrödingergleichung eines Teilchens für zwei kartesische Freiheitsgrade:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y) + V(x,y)\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)\,.$$

a) Leiten Sie für das Potential $V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$ mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\Psi(x,y) = X(x)Y(y)$$

zwei getrennte Eigenwertgleichungen für die beiden Freiheitsgrade ab. (4P)
Machen Sie sich klar, dass die Eigenwerte des zweidimensionalen Problems die Summe derjenigen der einzelnen Freiheitsgrade sind.

b) Ist dies auch möglich für $V(x,y) = V_x(x) \cdot V_y(y)$? (1P)

c) Die Ergebnisse von Teilaufgabe (a) sollen auf den zweidimensionalen harmonischen Oszillator (2D HO) angewandt werden. Hierbei schwingt die Masse m in einem zweidimensionalen Potential $V(x,y)$. Stellen Sie dazu die Schrödingergleichung für den 2D HO auf unter der Annahme, dass die Kraftkonstanten für beide Richtungen identisch sind, d.h. $f_x = f_y = f$. (1P)

d) Berechnen Sie unter Verwendung des Separationsansatzes $\Psi(x,y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$ das Eigenwertspektrum des 2D HO. Hierbei sind $\psi_{n_x}(x)$ bzw. $\psi_{n_y}(y)$ die schon bekannten Lösungen des eindimensionalen (1D) HO. (3P)
