Übungsblatt 8 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 17.12.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (Drehimpuls in sphärischen Polarkoordinaten).
In der Vorlesung wurde eine Beziehung für die z-Komponente des Drehimpulses in ebenen Polarkoordinaten abgeleitet :

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,. \qquad (\textbf{Anm.} : \varphi \equiv \phi,\ \textbf{vgl. Aufg. 2 und Beiblatt})$$

Verifizieren Sie unter Anwendung der Kettenregel, dass diese Beziehung auch in sphärischen Polarkoordinaten gültig ist. Die Kettenregel lautet (4P)

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

und die sphärischen Polarkoordinaten sind definiert durch

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\theta\,.$$

Aufgabe 2 (Kugelflächenfunktionen).
a) Bestätigen Sie durch Einsetzen, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ für $l = 1$ Eigenfunktionen des Betragsquadrates $\hat{L}^2$ des Drehimpulsoperators sind und verifizieren Sie die entsprechenden Eigenwerte: (6P)

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\,, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \qquad Y_{1+1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{+i\phi}\,.$$

b) Weisen Sie durch explizite Rechnung die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen Y_{00} und Y_{1m} $(m = 0, \pm 1)$ nach. Benutzen Sie dabei, dass das Integral einer Funktion $f(\theta,\phi)$ über die Einheitskugel durch die Formel

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

gegeben ist. (4P)
c) Zeigen Sie, dass $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ normiert ist. (1P)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Drehimpuls und Vektormodell der Drehimpulseigenfunktionen).

a) Zeigen Sie, dass der klassische Drehimpuls die Dimension einer Wirkung hat. (1P)

b) Betrachten Sie den Drehimpulseigenzustand Y_{21}, das heißt $l = 2$ und $m = 1$. Wie groß ist der Winkel zwischen dem Drehimpulsvektor und der positiven z-Achse? (Siehe Beiblatt zu den Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators). Die Länge des Drehimpulsvektors ist $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ und seine z-Komponente $\hbar m$. (2P)

Aufgabe 4 (Vergleich von starrem Rotator und Teilchen im Kasten).

Vergleichen Sie die Energieeigenwerte vom Teilchen im eindimensionalen, unendlich hohen Potentialkasten mit denen der Rotation um eine raumfeste Achse.

a) Nennen Sie die Quantenzahlen in beiden Fällen n und geben Sie die Beziehung zwischen Kreisradius r und Kastenlänge L an, für die die jeweiligen Eigenwerte (d.h. mit gleichem Wert von n) übereinstimmen. (1P)

b) Machen Sie sich den Zusammenhang der jeweiligen Eigenfunktionen für $n = 1$ klar. Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung zwischen Bogenmaß und Rotationswinkel.

(2P)
