Übungsblatt 7 zur “Einführung in die Quantentheorie”

WS 2012/13   Prof. H. Köppel

Abgabetermin 10.12.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (Wellenfunktionen vom Gauß-Typ).

a) Zeigen Sie, dass gilt (4P)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

und berechnen Sie damit das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$.

Hinweis: Man betrachte I^2 und gehe zu ebenen Polarkoordinaten über.

b) Gegeben ist eine Wellenfunktion $\psi(x)$ für die Bewegung eines Teilchens entlang der x-Achse von der Form

$$\psi(x) = Ne^{-\frac{\alpha}{2}x^2} e^{i\beta x}, \qquad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbf{R}) .$$

Berechnen Sie die Normierungskonstante N. (2P)

c) Bestimmen Sie für das gegebene $\psi(x)$ die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{p}$, sowie die Orts- und Impulsunschärfe Δx bzw. Δp. Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt $\Delta x \cdot \Delta p$? (8P)

Aufgabe 2 (Unschärferelation beim Harmonischen Oszillator)

Die allgemeinen Wellenfunktionen für den Harmonischen Oszillator lauten

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) , \qquad N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \hat{x} \rangle_n = \langle \hat{p} \rangle_n = 0$, wie in der Vorlesung angegeben ($\hat{p} = \hat{p}_x$). Werten Sie die auftretenden Integrale nicht explizit aus, sondern benutzen Sie vorhandene Symmetrien (d.h. $H_n(-\alpha x) = (-1)^n H_n(\alpha x)$)! (3P)

b) Berechnen Sie das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$ für den harmonischen Oszillator im Grundzustand ($n = 0$), wobei man unmittelbar auf die Ergebnisse obiger Aufgabe 1c zurückgreifen kann. (2P)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Koordinatenskalierung und klassisch verbotener Bereich beim Harmonischen Oszillator)

a) Machen Sie sich klar, dass die Skalierungskonstante beim harmon. Oszillator

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{fm}{\hbar^2}}$$

die Dimension seiner inversen Länge hat, d.h. dass die skalierte Auslenkung $z = \alpha x$ dimensionslos ist ($\dim[x] =$ Länge). (1P)

b) Bestimmen Sie für den Grundzustand des Harmonischen Oszillators die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich. Benutzen Sie dafür folgende Näherung für das auftretende Integral

$$\int_1^\infty e^{-z^2} dz \approx 0.139\,.$$

Warum ist die untere Integrationsgrenze gleich 1? (3P)
