Übungsblatt 6 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 03.12.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Hermite-Polynome)

a) Bestimmen Sie $H_3(z)$ anhand der Rekursionsrelation für die Koeffizienten der Hermite-Polynome gemäß Vorlesung. Benutzen Sie zusätzlich $a_3^{(3)} = 8$. (2P)

b) Verifizieren Sie anhand von $H_2(z)$ und $H_3(z)$, dass sich die $H_n(z)$ durch folgende Erzeugungsvorschrift konstruieren lassen ($z = \alpha x$): (3P)

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

c) Zeigen Sie für die Eigenfunktionen $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ des Harmonischen Oszillators, dass diese jeweils zueinander orthogonal sind. (3P)

Hinweis: Verwenden Sie für die auftretenden Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Nutzen Sie eventuell auftretende Symmetrien!

d) Verifizieren Sie anhand obiger Erzeugungsvorschrift den Vorfaktor 2^n für die jeweils höchste Potenz der Hermite-Polynome $H_n(z)$ durch vollständige Induktion (vgl. entsprechendes Beiblatt und VL). (3P)

Aufgabe 2 (Teilchen im Kasten, Unschärferelation)

Die normierten Wellenfunktionen des Teilchens im eindimensionalen Kasten der Länge L lauten (siehe Übungsblatt 4):

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie die Mittelwerte von Ort und Impuls gemäß (5P)

$$\langle x \rangle = \langle \psi_n | \hat{x} | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) x \psi_n(x) dx\,, \quad \langle p \rangle = \langle \psi_n | \hat{p} | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi_n(x) dx\,.$$

b) Berechnen Sie das Produkt der Orts- und Impulsunschärfe $\Delta x \cdot \Delta p$, wobei die Unschärfe $\Delta \hat{A}$ für den Operator $\hat{A}$ wie gewohnt nach $\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ definiert ist. (6P)

Führen Sie hierbei den Mittelwert $\langle \hat{p}^2 \rangle$ auf E_{kin} zurück (siehe Übungsblatt 4), wodurch sich die Rechnung erheblich vereinfachen läßt! Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?

Hinweis: Lösung der auftretenden Integrale mittels partieller Integration und trigonometrischer Umformungen. Anpassen der Integrationsgrenzen bei Substitution beachten!
