Übungsblatt 3 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 12.11.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (Kommutatoren).
Ein Kommutator für zwei beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\,.$$

Bestimmen Sie die Kommutatoren zwischen folgenden Operatoren
a) $[\hat{x}, \hat{p}_y]$
b) $[\hat{x}^2, \hat{p}_x]$
c) $[\hat{y}, \hat{p}_y^2]$
d) $[\hat{T}, \hat{p}_y]$, wobei gilt
$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$
Wie können die Ergebnisse interpretiert werden? (5P)

Aufgabe 2 (Erwartungswerte, Schwankungsquadrate).
a) Sei $\psi_n(x)$ eine Eigenfunktion zum hermiteschen Operator $\hat{F}$ mit Eigenwert f_n. Zeigen Sie die Gültigkeit der Identität

$$f_n = \frac{\langle \hat{F} \rangle_n}{\int |\psi_n(x)|^2 dx}\,,$$

wobei $\langle \hat{F} \rangle_n$ den Erwartungswert von $\hat{F}$ mit $\psi_n(x)$ bezeichnet. Folgern Sie hieraus, dass f_n reell ist. (4P)
b) Das Schwankungsquadrat des Operators $\hat{F}$ ist definiert als (vgl. Vorlesung)

$$(\Delta F)^2 = \left\langle \left(\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle\right)^2 \right\rangle = \langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2\,.$$

Zeigen Sie, dass $(\Delta F)^2$ für einen Eigenzustand von $\hat{F}$ verschwindet. (2P)

---

bitte wenden!

Aufgabe 3 (Zerlegung von Skalarprodukt und Erwartungswert).
Seien $\psi_n(x)$ Eigenfunktionen zum hermiteschen Operator $\hat{F}$ mit den Eigenwerten f_n und $\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$ sowie $\phi(x) = \sum_n d_n \psi_n(x)$.

a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung für die Norm von ψ, dass das Skalarprodukt von ψ und ϕ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_n c_n^* d_n$$

(2P)

b) Verifizieren Sie auf analoge Weise (vgl. Vorlesung) den nachfolgenden Ausdruck für den Erwartungswert

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 f_n$$

und interpretieren Sie diesen. (3P)

Aufgabe 4 (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren).
Bilden Sie mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren aus den Vektoren $\vec{v}_i, i = 1,2,3$ drei orthonormierte Basisvektoren $\vec{e}_i, i = 1,2,3$ und drücken Sie $\vec{v}_4$ als Linearkombination dieser neuen Basisvektoren aus: (5P)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
