Übungsblatt 1 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13   Prof. H. Köppel

Abgabetermin 29.10.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (De Broglie Wellenlänge, Doppelspaltexperiment).
Die Tatsache, dass sich die Wellennatur von Teilchen erst im mikroskopischen Bereich äußert, soll anhand des Zahlenbeispiels der Vorlesung nochmals verdeutlicht werden.
a) Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge eines Elektrons mit der kinetischen Energie E_{kin} =100 eV und eines Fußballs ($m = 1$ kg), der mit $v = 10$ m/s fliegt. (1P)
b) Wie groß müßte der Spaltabstand d in einem Doppelspaltexperiment (siehe Vorlesung) sein, damit für thermische Neutronen ein Interferenzmuster beobachtbar wäre ($x = 5$cm, $D = 0.2$m, $\Delta \approx \lambda$, $v = 2700$m/s, $m_N = 1.6749 \cdot 10^{-27}$kg)? Folgern Sie daraus, dass Neutronenbeugung an Kristallen möglich ist. (2P)

Aufgabe 2 (Rechnen mit komplexen Zahlen).
a) Berechnen Sie z_1^2, $z_1 z_2$, $z_1 z_1^*$, z_2^{-1} und e^{z_2} für $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 1 + 3i$. Drücken Sie z_1 in der Form $\rho e^{i\phi}$ aus. (3P)
b) Geben Sie für die folgenden Ausdrücke alle Wurzeln an: (3P)

$$\sqrt[4]{1}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[3]{-125i}$$

Aufgabe 3 (Trigonometrische Additionstheoreme).
Man benutze die komplexe Exponentialfunktion, um die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen herzuleiten (keine geometrischen Überlegungen). Zerlegen Sie dazu exp(i(α+β)) sowie exp(iα) und exp(iβ) nach Real- und Imaginärteil und fassen Sie dann geeignet zusammen ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie außerdem, dass gilt: $|\exp(i\alpha)| = 1$. (4P)

Aufgabe 4 (Wellenpakete).
Ebene de Broglie-Wellen sind bei wohldefiniertem Impuls vollständig delokalisiert:

$$A_c(x,t) = A_0 \exp\left[i(kx - \omega t)\right] .$$

Um lokalisierte Objekte (Teilchen) zu beschreiben, werden (prinzipiell unendlich) viele ebene Wellen zu einem Wellenpaket überlagert. Für den eindimensionalen Fall ergibt sich demnach für die Superposition im Bereich $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$:

$$\Psi(x,t) = a \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \exp\left[i(kx - \omega t)\right] dk\,. \tag{1}$$

Weiterhin sind die Größen ω und k wegen $E = p^2/(2m)$ nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt: $\omega = \omega(k)$.
Zeigen Sie, dass sich mit einer Reihenentwicklung von $\omega(k)$ gemäß

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)(k - k_0) + \ldots = \omega_0 + \omega'(k - k_0) + \ldots$$

für $\Psi(x,t)$ der folgende Ausdruck ergibt:

$$\Psi(x,t) = a\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)\cdot 2\frac{\sin[(\omega' t - x)\Delta k]}{\omega' t - x}\,.$$

Hinweis: Zur Auswertung von (1) ist die Substitution $\xi = k - k_0$ vorteilhaft. (5P)
