

2) Charaktere und Charaktertafeln

Einfachere Größen zur Charakterisierung von DS Matrizen.

Def. Der Charakter einer DS ist gleich der Spur der Darstellungsmatrix:

$$\chi^D(\mathbf{R}) = \text{Sp}(\Gamma(\mathbf{R})) = \sum_{n=1}^l \Gamma_{nn}(\mathbf{R})$$

Eigenschaften

- 1) Die Charaktere äquivalenter DS sind gleich,
 $\chi'(\mathbf{R}) = \text{Sp}[\mathbf{S}^{-1} \Gamma(\mathbf{R}) \mathbf{S}] = \text{Sp}[\Gamma(\mathbf{R})] = \chi(\mathbf{R})$
- 2) Die Charaktere $\chi(\mathbf{R})$ aller Elemente \mathbf{R} aus einer Klasse sind gleich (Begründung s.o.)
- 3) Der Charakter einer reduziblen DS ist folgende Summe der enthaltenen Irreps.

$$\Gamma \equiv n_1 \Gamma^{(1)} \oplus n_2 \Gamma^{(2)} \oplus \dots \quad \text{direkte Summe}$$

$$\Rightarrow \chi = n_1 \chi^{(1)} + n_2 \chi^{(2)} + \dots = \sum_i n_i \chi^{(i)}$$

Beachte: Für Charaktere ist die Zerlegung unabhängig von Ähnlichkeitstrafos.

- 4) Für die Charaktere der versch. Irreps. läßt sich die Folgerung des Orthogonalitäts-Theorems umschreiben gemäß $\chi_i(E) = 1_i \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\sum_i \chi_i^2(E) = h}}$$

- 5) Für nichtäquivalente (unitäre) irreduzible DS gilt die Orthogonalitätsrelation für Charaktere

$$\sum_R \chi^{(i)}(R) \chi^{(j)}(R)^* = h \delta_{ij}$$

Beweis: Setze $n = m, n' = m'$ im Orthog.

Theorem; summiere über n, n'

Speziell für $i = j$ gilt $\underline{\underline{\sum_R |\chi^{(i)}(R)|^2 = h}}$

6) Reduzibilitätskriterium

Für Γ reduzibel gilt $\Gamma = \oplus \sum n_i \Gamma^{(i)}$ d.h. $\chi = \sum_i n_i \chi^{(i)}$

$$\Rightarrow \sum_R |\chi(R)|^2 = \sum_R \sum_i \sum_j n_i \chi^{(i)}(R) n_j \chi^{(j)}(R)^*$$

$$= \sum_{ij} n_i n_j h \delta_{ij} = h \sum_i n_i^2 \geq \underline{\underline{h}}$$

Gleichheitszeichen gilt nur für irred. DS !

7) Zerlegung in irreduzible Darstellungen

$$\text{Geg. } \chi(R) = \sum n_i \chi^{(i)}(R) \implies \sum_R \chi(R) \chi^{(j)}(R)^* =$$

$$= \sum_{i,R} n_i \chi^{(i)}(R) \chi^{(j)}(R)^*$$

$$= n_j \cdot h$$

$$\implies \boxed{n_j = \frac{1}{h} \sum_R \chi^{(j)}(R)^* \chi(R)}$$

- 8) **Satz** Die Zahl der nichtäquivalenten irred. DS für eine Gruppe G ist gleich der Anzahl der Klassen von G .

Folgerung für abelsche Gruppen:

Ein Element pro Klasse $\implies h$ irreduzible DS

$$\implies h = \sum_{i=1}^h l_i^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_h^2$$

$$\implies l_1 = l_2 = \dots = l_h = 1$$

d.h. alle irred. DS abelscher Gruppen sind eindimensional.

Die Charaktertafeln

Diese enthalten die wesentlichen Informationen über die irreduziblen DS von Gruppen; nicht vollständig, aber für viele Zwecke ausreichend. Charaktertafeln sind wg. Bemerkung 2 und 8 als quadratische Schemata angebbbar. Tabelliert in vielen Büchern, z.B. Wilson, Decius, Cross, Molecular Vibrations (App. X); Tinkham, App. B XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX; Cotton, App. III.

Für einfache Gruppen direkt konstruierbar!

Beispiel C_{2v} : Abelsch, 4 x 4 Matrix, Zeilen orthogonal; Elemente ± 1

	E	C_2	σ_v	σ_v'	
A_1	1	1	1	1	z
A_2	1	1	-1	-1	
B_1	1	-1	1	-1	y
B_2	1	-1	-1	1	x

Beachte: auch Spalten sind orthogonal.

Orthogonalitätsrelation für Charaktertafeln

(nach Klassen geordnet)

a) Zeilen (summiere über Klassen)

$$\sum_{\mu} \chi_{\mu}^{(i)} \chi_{\mu}^{(j)*} g_{\mu} = h \delta_{ij}$$

Folgt aus
Eigenschaft 5

"Orthogonalität mit Gewichten"

b) Spalten

$$\sum_i \chi_{\mu}^{(i)} \chi_{\nu}^{(i)*} = \frac{h}{g_{\mu}} \delta_{\mu\nu}$$

vgl. Eigenschaft 4

Beweisidee: Matrix vertauscht mit ihrer Inversen!

Beispiel C_{3v}

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	U	v
E	2	A	b

$$\uparrow \\ \sum l_i^2 = 6$$

$$u = 1, \quad v = -1 \quad \Rightarrow$$

$$A = -1, \quad b = 0$$