Beiblatt: Zur Mathematik der Hermite-Polynome

1. Rodriguez-Formel

   Die Hermite-Polynome $H_n(z)$ lassen sich in einfacher Weise sukzessive aus den Ableitungen der Funktion

   $$f(z) = e^{-z^2}$$

   erzeugen:

   $$\begin{aligned} f^{'}(z) &= -2ze^{-z^2} \\ f^{''}(z) &= (4z^2 - 2)e^{-z^2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^n H_n(z) e^{-z^2}. \end{aligned}$$

   Hier bezeichnet $H_n(z)$ das $n-$te Hermite Polynom. Allgemein lautet die Definition (Rodriguez-Formel)

   $$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{-z^2} \right)$$

---

2. Erzeugende Funktion

   Betrachte

   $$\begin{aligned} f(z+\lambda) &= e^{-(z+\lambda)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^{(n)}(z) \quad \text{(Taylorentwicklung nach } \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (-1)^n H_n(z) e^{-z^2} \quad \text{(nach 1.)} \\ f(z-\lambda)e^{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z) \end{aligned}$$

   also gilt

   $$w(z,\lambda) := e^{2z\lambda - \lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(z). \qquad (*)$$

   Die Funktion $w(z,\lambda)$ wird als erzeugende Funktion der Hermite-Polynome bezeichnet. Die Hermite-Polynome tauchen hier als die $z-$abhängigen Koeffizienten einer Taylor-Reihe in λ auf.

---

3. Rekursionsrelationen
   Differenziert man Gleichung $(*)$ partiell nach λ, folgt

$$\frac{\partial w(z,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} H_n(z).$$

   Ausgeschrieben bedeutet das

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} 2z H_n(z) - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} H_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_{n+1}(z).$$

   Mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} (n+1) H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n H_{n-1}(z)$$

(kein Beitrag für n=0 !)

   erhält man die sehr nützlichen Rekursionsrelationen

$$H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0.$$

---

4. Differentialgleichungen
   Analog liefert die partielle Differentiation von $(*)$ nach z

$$\frac{\partial w(z,\lambda)}{\partial z} = 2\lambda w(z,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n^{'}(z).$$

   Wegen

$$\lambda w(z,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n H_{n-1}(z)$$

   folgt

$$H_n^{'}(z) = 2nH_{n-1}(z)$$

   Differentiation der Rodriguez-Formel liefert

$$\frac{\partial H_n(z)}{\partial z} = (-1)^n 2z e^{z^2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(e^{-z^2}\right) + (-1)^n e^{z^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} \left(e^{-z^2}\right),$$

   also

$$H_n^{'}(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z).$$

   Durch Gleichsetzen erhält man wieder die Rekursionsrelationen. Nochmaliges Differenzieren liefert dann

$$\begin{aligned} H_n^{''}(z) &= 2H_n(z) + 2zH_n^{'}(z) - H_{n+1}^{'}(z) \\ &= 2H_n(z) + 2zH_n^{'}(z) - 2(n+1)H_n(z), \end{aligned}$$

also

$$H_n^{''}(z) - 2zH_n^{'}(z) + 2nH_n(z) = 0$$

Diese Differentialgleichungen zeigen, dass die Polynome $H_n(z)$ in der Tat die bei der Lösung der (zeitunabhängigen) Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator auftretenden Hermite-Polynome sind.

---

5. Orthogonalitätsrelationen
Die Hermite-Polynome erfüllen die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}.$$

Dazu betrachte man

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} w(z,t) w(z,s) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{2z(t+s)} e^{-t^2-s^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-(t+s))^2} e^{2ts} dz \\
&= e^{2ts}\sqrt{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ts)^n}{n!} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} w(z,t) w(z,s) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m(z) \frac{s^n}{m!} \right) \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{s^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz.
\end{aligned}$$

Der Vergleich liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}.$$