I.3 Verallgemeinerte Koordinaten und Impulse
Die in I.1 betrachteten Newtonschen Bewegungsgleichungen setzen kartesische Koordinaten voraus. Oft ist aber eine Beschreibung des Systems mit Hilfe von nicht-kartesischen oder "verallgemeinerten" Koordinaten besser geeignet. Das gilt insbesondere, wenn "Zwangsbedingungen" die Bewegungsfreiheit einschränken (s. Beispiel 2).

Als verallgemeinerte Koordinaten (VK) bezeichnet man einen Satz von *unabhängigen* Größen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, die das betrachtete System (z.B. von N Massenpunkten) *vollständig* und *eindeutig* beschreiben. Die Anzahl der VK wird auch als Zahl der "Freiheitsgrade" des Systems bezeichnet. Bemerkung: Das impliziert mathematische Beziehungen der Form

$$\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n),\ i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

mit denen man die kartesischen Koordinaten des Systems aus den verallgemeinerten Koordinaten berechnen kann.

Die Bewegung des Systems lässt sich dann durch die Angabe der Koordinaten-Zeit-Funktionen $q_i = q_i(t), i = 1, \ldots, n$ verfolgen. Entsprechende verallgemeinerte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t) \tag{2}$$

lassen sich als Ableitungen der Koordinaten-Zeit-Funktionen einführen.

Beispiele für verallgemeinerte Koordinaten:
1. Massenpunkt (3 Freiheitsgrade) in sphärischen Polarkoordinaten (r, θ, ϕ). Der Zusammenhang mit den drei kartesischen Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

2. Ebenes Pendel (planare Bewegung eines an einem (masselosen) Faden der Länge l aufgehängten Massenpunktes der Masse m im Schwerefeld). Die Bewegung erfolge z.B. in der x-$z-$Ebene. Offenbar genügt die Angabe des Auslenkungswinkels ϕ aus der Vertikalen (negative $z-$Achse), um das System vollständig und eindeutig zu beschreiben. Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$x = l \sin\phi,\ z = -l \cos\phi$$

lassen sich die kartesischen Koordinaten des Massenpunktes aus ϕ berechnen.
Das ebene Pendel ist ein Beispiel für das Auftreten von Zwangsbedingungen. Durch die Aufhängung an den Faden wird die Bewegung in der Ebene (2 Freiheitsgrade) auf eine 1-dimensionalen Bewegung (1 Freiheitsgrad) eingeschränkt.

Wie lauten die **Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten**, also die Verallgemeinerung der Newton-Gleichungen? Die Antwort gibt der sogenannte **Lagrange-Formalismus**, den man wie ein einfaches Rezept verwenden kann.

Als vorbereitenden Schritt wollen wir die potentielle und kinetische Energie in verallgemeinerten Koordinaten und Gewchwindigkeiten ausdrücken.
Potentielle Energie:
Für ein (konservatives) System von N Massenpunkten ist jeder Systemkonfiguration ein Wert, nämlich die jeweilige potentielle Energie zugeordnet. Je nachdem ob man die Systemkonfigurationen mit kartesischen Koordinaten $(\underline{r}_1, \underline{r}_, \ldots, \underline{r}_N)$ oder verallgemeinerten Koordinaten $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ charakterisiert, erhält man eine Funktion $V = V(\underline{r}_1, \underline{r}_, \ldots, \underline{r}_N)$ bzw. $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Beispiel 2 (Pendel):

$$V = V(z) = mgz = -mgl\cos\phi = V(\phi)$$

Kinetische Energie: Bei der kinetischen Energie muss man stets von dem Ausdruck

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 \tag{4}$$

ausgehen und dann die kartesischen durch verallgemeinerten Geschwindigkeiten ersetzen. Der mathematische Zusammenhang zwischen kartesischen und verallgemeinerten Geschwindigkeiten ergibt sich, indem man die Beziehungen (1) nach der Zeit differenziert.

Beispiel 1 (Sphärischen Polarkoordinaten):
Die Zeitableitungen von Gl. (3) ergeben (Kettenregel beachten):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sin\theta\cos\phi\,\dot{r} + r\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi} \\
\dot{y} &= \sin\theta\sin\phi\,\dot{r} + r\cos\theta\sin\phi\,\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi} \\
\dot{z} &= \cos\theta\,\dot{r} - r\sin\theta\,\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der momentanen Einheitsvektoren (Übungsaufgabe 2, Blatt 1) kann man das kompakter schreiben:

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\underline{e}_\phi$$

Für die kinetische Energie ergibt sich

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)
\end{aligned}$$

Bespiel 2 (Pendel):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$$

Der eigentliche Lagrange-Formalismus besteht aus folgenden zwei Schritten:
(1) Bestimme die Lagrange-Funktion

$$L = L(q_i, \dot{q}_1) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \tag{5}$$

Die Lagrange-Funktion ist also die Differenz von kinetischer und potentieller Energie als Funktion der Koordinaten q_i und Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$ (hier wird die abkürzende Schreibweise $f(q_i) = f(q_1, \ldots, q_n)$ verwendet).
(2) Die Lagrange-Gleichungen (Bewegungsgleichungen in VK) ergeben sich aus der Lagrange-Funktion wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Hier bedeutet $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, dass man L nach der Größe $\dot{q}_i$ mit den gewohnten Rechenregeln ableitet; z.B. $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\dot{q}^5 q^2 = 5\dot{q}^4 q^2$.

Bemerkungen:
i) Die L-Gleichungen folgen aus einem Variationsprinzip für das “Wirkungsintegral”

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_1) dt \tag{7}$$

Für die tatsächliche Bewegung $(q_i(t), \dot{q}_i)$ wird S minimal. Beachte, dass S, wie das Plancksche Wirkungsquantum, die Dimension “Energie×Zeit” hat.
ii) Für kartesische Koordinaten sind die L-Gleichungen mit den Newton-Gleichungen identisch.
iii) Die Größen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{8}$$

werden als (zu den Koordinaten q_i) kanonisch konjugierte Impulse bezeichnet.

Anhand von Beispiel 2 (Pendel) wollen wir uns ansehen, wie die Sache funktioniert.
(1) Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos\phi$$

Benötigte Ableitungen von L:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi}, \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl \sin\phi$$

(2) Damit ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2\ddot{\phi} + mgl\sin\phi = 0$$

bzw. nach weiterer Vereinfachung

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$

Für kleine Auslenkungen kann man näherungsweise $\sin\phi \approx \phi$ setzen. Damit geht die Pendelgleichung in die eines harmonischen Oszillators mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ über.

Aufgabe: Bestimme die Bewegungsgleichungen für das Keplerproblem (Planetenbewegung um Sonne im Zentrum) in sphärischen Polarkordinaten. Die potentielle Energie ist $V(r) = -\frac{c}{r}$.