Übungsblatt Nr. 8

Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. Schwingungsstruktur bei elektronischer Anregung (5 Punkte)
   Bei elektronischer Anregung eines zweiatomigen Moleküls werde der Zustand

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \;\; c_n = \frac{a^{n/2}}{\sqrt{n!}}$$

   "präpariert", wobei $\phi_n(x)$ die Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit Frequenz ω sind und a ein positiver reeller Parameter ist. Normiere diesen Zustand und berechne den Mittelwert $\overline{E}$ der Energie und die Energieunschärfe ΔE. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten misst man die individuellen Energiewerte E_n? Berechne für $a = 1$ bzw. $a = 10$ die numerischen Werte der ersten 10 Wahrscheinlichkeiten ($n = 0, \ldots, 9$). Skizziere die Energieverteilung mit Hilfe eines "Linienspektrums", in dem die Wahrscheinlichkeit eines Energiewertes durch eine entsprechend lange Linie dargestellt ist.

2. Hermite-Polynome
   Auf beiliegender Anlage sind einige wichtige mathematische Beziehungen für die Hermite-Polynome zusammengestellt. Bitte sorgfältig anschauen, wird dann in den Übungsstunden besprochen.

3. Harmonischer Oszillator: Eigenfunktionen (5 Punkte)
   Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators lauten

$$\varphi_n(x) = N_n\, H_n(z)\, e^{-\frac{z^2}{2}}, \;\; z = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x, \;\; N_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$$

   wobei $H_n(z)$ Hermite-Polynome sind. Berechne die Matrixelemente

$$x_{mn} = (\varphi_m, \hat{x}\varphi_n), \;\; p_{mn} = (\varphi_m, \hat{p}\varphi_n)$$

   des Orts- bzw. Impulsoperators. Hinweis: Benutze die Rekursionsrelation

$$H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0$$

   und die Beziehung $H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z)$ nach der Anlage Hermite-Polynome.

Abgabetermin: Dienstag, 9. 12. 08, 13.00 Uhr