Übungsblatt Nr. 6

**Übungen zur "Einführung in die Quantentheorie"**
WS 08/09 Prof. J. Schirmer

1. Linearkombination von Eigenzuständen (3 Punkte)
   Ein System sei im Zustand
   $$\psi(x) = 2\psi_0(x) + i\,\psi_1(x) - \sqrt{2}\,\psi_2(x),$$
   wobei $\psi_0(x), \psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ normierte Eigenfunktionen eines Hamiltonoperators $\hat{h}$ mit den Eigenwerten $e_0$, $e_1$, bzw. $e_2$ sind.
   (a) Normiere $\psi(x)$.
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Energiemessung den Wert $e_2$? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nicht $e_0$ zu messen?
   (c) Bestimme den Mittelwert der Energie, $\overline{E} = (\psi, \hat{h}\psi)$, und die Energieunschärfe, $\Delta E = (\psi, (\hat{h} - \overline{E})^2\psi)^{1/2}$.

2. Eigenwertproblem algebraisch (3 Punkte)
   Die Wellenfunktionen $\phi_1, \phi_2$ seien normiert und zueinander orthogonal. Für einen Operator $\hat{O}$ gelte
   $$\hat{O}\phi_1 = 2\phi_1 - \sqrt{2}\phi_2,\ \hat{O}\phi_2 = -\sqrt{2}\phi_1 + \phi_2$$
   Bestimme die Matrixelemente $O_{ij} = (\phi_i, \hat{O}\phi_j)$, $i, j = 1, 2$. Bestimme zwei Eigenfunktionen von $\hat{O}$ in der Form $\psi = x_1\phi_1 + x_2\phi_2$ und die zugehörigen Eigenwerte.

3. Eigenwertproblem analytisch (3 Punkte)
   Es sei $\psi(x) = e^{-x^2/a}$, $a > 0$, eine Wellenfunktion für eine eindimensionale Bewegung ($x$ dimensionslos). Bestimme $a$ so, daß $\psi(x)$ Eigenfunktion des Operators $\hat{A} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

4. Zusatzaufgabe: Beweis der Unschärferelation (5 Punkte)
   $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ seien hermitische Operatoren, für die die Vertauschungsrelation $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ gilt. Zeige, dass für einen beliebigen Zustand $\phi$ die Ungleichung (Unschärferelation) $(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2}|\overline{C}|$ für das Produkt der Unschärfen $\Delta A$ und $\Delta B$ gilt. Hier bezeichnet $\overline{C}$ den Mittelwert von $\hat{C}$ im Zustand $\phi$. Wann gilt das Gleichheitszeichen? Zeige, dass dies für die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$ und die Wellenfunktion von Aufg. 2), Blatt 5, der Fall ist.
   Anleitung: Definiere zwei neue Operatoren $\hat{X} = \hat{A} - \overline{A}$ und $\hat{Y} = \hat{B} - \overline{B}$ und betrachte den Zustand $\psi = (\lambda\hat{X} + i\hat{Y})\phi$, wobei $\lambda$ eine beliebige reelle Zahl ist. Benutze, dass das Skalarprodukt (Normierungsintegral) $N(\lambda) = (\psi, \psi)$ für alle Werte von $\lambda$ positiv sein muss. Die Gleichung $N(\lambda) = 0$ darf also keine reelle Nullstelle haben.

Abgabetermin: Dienstag, 25. 11. 08, 13.00 Uhr