2) Charaktere und Charaktertafeln

Einfachere Größen zur Charakterisierung von DS Matrizen.

Def. Der Charakter einer DS ist gleich der <u>Spur</u> der Darstellungsmatrix:

$$\chi^D(R) \quad = \quad Sp\,(\Gamma(R)) \quad = \quad \sum_{n=1}^{l} \Gamma_{nn}(R)$$

Eigenschaften

1) Die Charaktere äquivalenter DS sind <u>gleich</u>,
$\chi'(R) = Sp\,[\mathbf{S}^{-1}\,\Gamma(R)\,\mathbf{S}\,] = Sp\,[\,\Gamma(R)\,] = \gamma\,(R)$

2) Die Charaktere $\chi(R)$ aller Elemente R aus einer Klasse sind gleich (Begründung s.o.)

3) Der Charakter einer <u>reduziblen</u> DS ist folgende Summe der enthaltenen Irreps.

$$\Gamma \quad \equiv \quad n_1\Gamma^{(1)} \oplus n_2\Gamma^{(2)} \oplus \ldots \qquad \text{direkte Summe}$$

$$\Rightarrow \quad \chi \quad = \quad n_1\chi^{(1)} + n_2\chi^{(2)} + \ldots = \sum_i n_i\chi^{(i)}$$

Beachte: Für Charaktere ist die Zerlegung unabhängig von Ähnlichkeitstrafos.

4) Für die Charaktere der versch. Irreps. läßt sich die Folgerung des Orthogonalitäts-Theorems umschreiben gemäß $\chi_i(E) = l_i \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\sum_i \chi_i^2(E) = h}}$$

5) Für nichtäquivalente (unitäre) irreduzible DS gilt die Orthogonalitätsrelation für Charaktere

$$\sum_R \chi^{(i)}(R)\, \chi^{(j)}(R)^{(*)} = h\, \delta_{ij}$$

Beweis: Setze n = m, n´ = m´ im Orthog. Theorem; summiere über n, n´

Speziell für i = j gilt $\underline{\underline{\sum_R \left| \chi^{(i)}(R) \right|^2 = h}}$

6) **Reduzibilitätskriterium**

Für Γ reduzibel gilt $\Gamma = \sum n_i\, \Gamma^{(i)}$

$$\Rightarrow \sum_R \left| \chi(R) \right|^2 = \sum_R \sum_i \sum_j n_i\, \chi^{(i)}(R)\, n_j\, \chi^{(j)}(R)^*$$

$$= \sum_R \sum_i n_i^2 \left| \chi^i(R) \right|^2 = h \sum n_i^2 \ \underline{\underline{\geq h}}$$

Gleichheitszeichen gilt nur für irred. DS !

7) Zerlegung in irreduzible Darstellungen

Geg. $\chi(R) = \sum n_i \chi^{(i)}(R) \longrightarrow \sum\limits_R \chi(R)\,\chi^{(j)}(R)^* =$

$$= \sum_{i,R} n_i\, \chi^{(i)}(R)\,\chi^{(j)}(R)^*$$

$$= n_j \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_j = \tfrac{1}{h} \sum_R \chi^{(j)}(R)^*\, \chi(R)}$$

8) **Satz** Die Zahl der nichtäquivalenten irred. DS für eine Gruppe G ist gleich der Anzahl der Klassen von G.

Folgerung für **abelsche** Gruppen:

Ein Element pro Klasse $\Rightarrow$ h irreduzible DS

$$\Rightarrow h = \sum_{i=1}^{h} l_i^2 = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_h^2$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2 = \ldots\ l_h = 1$$

d.h. alle irred. DS abelscher Gruppen sind eindimensional.

Die Charaktertafeln

Diese enthalten die wesentlichen Informationen über die irreduziblen DS von Gruppen; nicht vollständig, aber für viele Zwecke ausreichend. Charaktertafeln sind wg. Bemerkung 2 und 8 als quadratische Schemata angebbar. Tabelliert in vielen Büchern, z.B. Wilson, Decius, Cross, Molecular Vibrations (App. X); Tinkham, App. B [redacted]; Cotton, App. III.

Für einfache Gruppen direkt konstruierbar!
Beispiel C_{2v}: Abelsch, 4 x 4 Matrix, Zeilen orthogonal; Elemente ± 1

	E	C_2	σ_v	σ_v'	
A_1	1	1	1	1	z
A_2	1	1	-1	-1	
B_1	1	-1	1	-1	y
B_2	1	-1	-1	1	x

Beachte: auch Spalten sind orthogonal.

Orthogonalitätsrelation für Charaktertafeln

(nach Klassen geordnet)

a) Zeilen (summiere über Klassen)

$$\boxed{\sum_{\mu} \chi_{\mu}^{(i)} \chi_{\mu}^{(j)*} g_{\mu} = h\delta_{ij}}$$

Folgt aus Eigenschaft 5

"Orthogonalität mit Gewichten"

b) Spalten

$$\boxed{\sum_{i} \chi_{\mu}^{(i)} \chi_{\nu}^{(i)*} = \frac{h}{g_{\mu}} \delta_{\mu\nu}}$$

vgl. Eigenschaft 4

Beweisidee: Matrix vertauscht mit ihrer Inversen!

Beispiel C_{3v}

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	U	v
E	2	A	b

$\uparrow$

$\sum l_i^2 = 6$

$u = 1, \quad v = -1 \quad \Rightarrow$

$A = -1, \quad b = 0$