Übungsblatt 10 zur "Einführung in die Quantentheorie"

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 14.01.2013 (11:00)

Aufgabe 1 (Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms).
Für den Fall der maximalen Drehimpulsquantenzahl $l = l_{max} = n-1$ zu gegebenem n nehmen die Eigenlösungen $\psi_{n,n-1,m}(r,\theta,\phi)$ des H-Atoms eine einfachere Form an:

$$\psi_{n,n-1,m}(r,\theta,\phi) = R_{n,n-1}(r)Y_{n-1,m}(\theta,\phi) = \frac{\left(\frac{2}{a_0 n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2n)!}} r^{n-1} e^{-\frac{r}{a_0 n}} Y_{n-1,m}(\theta,\phi)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\psi_{n,n-1,m}(r,\theta,\phi)$ normiert ist, d.h.

$$\langle \psi_{n,n-1,m} | \psi_{n,n-1,m} \rangle = 1\,.$$

Dabei ist das Volumenelement für die dreidimensionale Integration in sphärischen Koordinaten gegeben durch

$$dV = r^2 dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi\,,$$

und die Normiertheit der $Y_{lm}(\theta,\phi)$ kann als gegeben angenommen werden. (2P)

b) Mit obiger Wellenfunktion soll der Erwartungswert einer nur von r (nicht $\vec{r}$) abhängigen Funktion $f(r)$ berechnet werden. Geben Sie hierzu das resultierende Integral in r an und berechnen Sie die Erwartungswerte für $f(r) = r, r^2$ und $\frac{1}{r}$. (5P)

c) Was ergibt sich für $n = 1$ und den Grenzfall $n \to \infty$? (2P)

Hinweis: Folgendes Integral wird benötigt:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r} r^m dr = \frac{m!}{\alpha^{m+1}}\,.$$

Aufgabe 2 (Effektives Potential in wasserstoffähnlichen Systemen).
In wasserstoffähnlichen Systemen bewegt sich das Elektron im effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\,, \qquad l > 0\,.$$

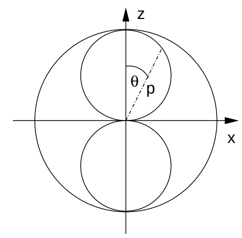
a) Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$ und bestimmen Sie dessen Minimum $V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$. (2P)

b) Wie groß ist die Energiedifferenz zwischen den exakten Energieeigenwerten wasserstoffähnlicher Systeme und $V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})$, wobei der Fall $n = l+1, l > 0$ betrachtet werden soll (also für $2p$, $3d$, $4f, \ldots$ Zustände)? (2P)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Eigenschaften von Winkelfunktionen).

a) In Lehrbüchern findet man oft die rechts gezeigte Polardarstellung für $\cos\theta$. Weisen Sie nach, dass die Länge der Strecke p gleich $\cos\theta$ ist. Der Außenkreis hat dabei den Radius 1. (3P)



b) Machen Sie sich die Winkelabhängigkeit der reellen $3d_{xy}$ Funktion in zwei Schritten klar. Bestimmen Sie zunächst deren Knotenlinien (=Nulldurchgänge) in der x-y Ebene, d.h. für $\theta = 90\,°$. Wie verhält sich die Funktion auf der z-Achse? Benutzen Sie weiterhin die Vorzeichenalternanz in der x-y Ebene und folgern Sie daraus das räumliche Verhalten gemäß Beiblatt der Vorlesung vom 9. Januar (Wedler, Abb. 3.11). (4P)
