

Übungsblatt 2 zur “Einführung in die Quantentheorie”

WS 2012/13 Prof. H. Köppel

Abgabetermin 5.11.2012 (11:00)

Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen).

a) Gegeben sei die reell-symmetrische 2×2 Matrix

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und (normierten) Eigenvektoren in Abhängigkeit von a . Zeigen Sie, dass die erhaltenen Eigenvektoren zueinander orthogonal sind. Was passiert für $a = 0$? (4P)

b) Gegeben sei die hermitesche 2×2 Matrix

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} 3 & 1 - i \\ 1 + i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ebenfalls die Eigenwerte. Was fällt auf? (2P)

Aufgabe 2 (Quadratintegrale Funktionen).

Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen normierbar (quadratintegabel) und von daher als Wellenfunktionen geeignet sind (a reell und $a > 0$). Skizzieren Sie zudem den Funktionsverlauf.

a) $f(x) = e^{-ax^2}$

b) $f(x) = e^{-ax}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (4P)

Aufgabe 3 (Operatoren, Hermitizität).

a) Welche der Funktionen von Aufgabe 2 sind Eigenfunktionen zu den Operatoren $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d^2}{dx^2}$? Was sind ggf. die Eigenwerte? (4P)

b) Zeigen Sie, dass die beiden Operatoren $\frac{d}{dx}$ und $i\hat{x}$ im Raum der quadratintegrablen Funktionen antihermitesch sind. Für einen antihermiteschen Operator \hat{O} gilt (3P)

$$\int \psi^*(\hat{O}\phi) dx = - \int (\hat{O}\psi)^* \phi dx.$$

bitte wenden!

Aufgabe 4 (Hermitesche Operatoren).

a) Verifizieren Sie, dass das Quadrat eines hermiteschen Operators ebenfalls hermitesch ist. (2P)

b) Zeigen Sie (durch vollständige Induktion), dass dies auch für die n-te Potenz gilt. (2P)

Aufgabe 5 (Unschärferelation).

Wie groß ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$ mindestens die Ortsunschärfe Δx eines fliegenden Balles (Masse 2 kg), wenn dessen Geschwindigkeit auf $\Delta v = 1 \text{ mm/sec}$ genau bestimmt wird? (2P)
