

Transformationsmatrizen des Ortsvektors

~~Aufgabe 4~~ Betrachten Sie die Drehung eines Punktes mit dem Ortsvektor

Beispiel:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Skizze
unten

Dieser wird durch die Drehung um den Ursprung um den Winkel α (Gegenuhrzeigersinn) überführt in:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \alpha) \\ \sin(\varphi + \alpha) \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(\varphi + \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \varphi$$

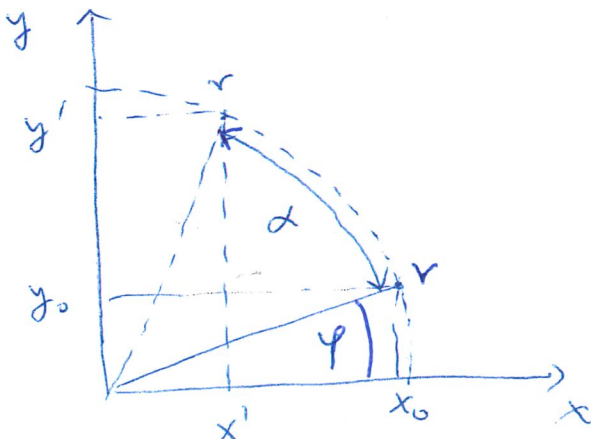
$$\cos(\varphi + \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha$$

um die Gültigkeit der folgenden Relation zu zeigen:

$$M(\alpha) \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi + \alpha) \\ r \sin(\varphi + \alpha) \end{pmatrix} = \vec{r}'$$

D.h. ^{ist}

~~Dabei ist~~ $M(\alpha)$ die sogenannte Rotationsmatrix, die den Einfluss der Drehung auf den Ortsvektor beschreibt (darstellt).



$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi \\ \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$