Eigenfunktionen u. Eigenwerte des H-Atoms

DGL hat einen diskreten Satz von Lösungen. Dies führt zu einer neuen Quantenzahl n, der Radial- oder *Hauptquantenzahl*. Die Lösung sind *Laguerre-Polynome* und es gilt $n \geq l+1$.
Mehr Details: s. Wedler, Kap. 3.2.3

Die vollständigen Lösungsfunktionen sind:

$$\boxed{\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = N_{nl} R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)}$$

$$\boxed{R_{nl}(r) = -e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad n \geq l+1}$$

$$N_{nl} = \sqrt{\frac{(n-l-1)!(\alpha_n)^3}{2n((n+l)!)^3}}$$

$$\rho = \alpha_n r, \quad \alpha_n = \frac{2Z}{na_0}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.2917 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \quad \text{(Bohr'scher Radius)}$$

Die Eigenwerte sind

$$\boxed{E_n = -R_\infty Z^2 \tfrac{1}{n^2} \quad n = 1,2,3\ldots}$$

$$R_\infty = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = \text{Rydbergkonstante} = 13.6\,\mathrm{eV}$$

Der Index ∞ steht für die angenommene unendliche Masse des Protons. Die tatsächliche Rydbergkonstante des H-Atoms ist

$$R_H = \frac{\mu e^4}{32\epsilon_0^2\pi^2\hbar^2}$$

wobei

$$\mu = \frac{m_p m_e}{(m_p + m_e)} = \frac{m_e}{\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)} \quad \text{effektive Masse (reduzierte Masse)}$$